PRUEBAS DE ACCESO

A LAS UNIVERSIDADES

DE ANDALUCÍA

PARA MAYORES DE 25 AÑOS

EXÁMENES PROPUESTOS Y RESUELTOS DE

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

CONVOCATORIAS DE 2010-2011-2012-2013

F. Jiménez Gómez

Depósito Legal: GR 961-2013

Índice

Presentación:

Desde el año 1995 se viene realizando un examen común en todas las Universidades de Andalucía para el acceso a éstas de los alumnos mayores de 25 años que quieren optar por esta opción.

De acuerdo con la normativa vigente, a partir de 1 de enero de 2010, el alumno elige entre cinco vías, según la titulación a la que desea acceder después de haber superado la prueba, pues cada una de estas vías está vinculada a unas determinadas titulaciones. En concreto:

Vía A: Artes y Humanidades
Vía B: Ciencias
Vía C: Ciencias de la Salud
Vía D: Ciencias Sociales y Jurídicas
Vía E: Ingeniería y Arquitectura.

En la vía D está incluida como materia de examen, en la fase específica, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.

En este manual están contenidos los exámenes de esta materia propuestos en los años 2010 a 2013, ambos inclusive, con sus correspondientes soluciones. En cada examen, al alumno se le proponen 6 ejercicios de los que deberá elegir, para resolver, 3 de ellos.

Este texto es una continuación de dos anteriores: el que en 2003 editó la editorial Proyecto Sur de Ediciones, que contenía los exámenes propuestos desde 1995 hasta 2002 y del editado en 2010 por la Universidad de Cádiz, que contenía los propuestos desde 2003 a 2009.

El autor, como en los textos precedentes, pretende que esta recopilación pueda ser de utilidad para preparadores y alumnos que opten al acceso a las Universidades de Andalucía por esta opción. En la resolución de estos ejercicios se utilizan procedimientos que, obviamente, no tienen por qué ser únicos.

Francisco Jiménez Gómez
Ponente de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Universidad de Granada

Granada, mayo de 2013

ENUNCIADOS Y RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES EN LAS CONVOCATORIAS DE 2010, 2011, 2012,2013

Francisco Jiménez Gómez

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2010 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\dfrac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$.

b) (5 puntos) Determine los coeficientes de la ecuación $3x^2 - ax + b = 0$ para que sus soluciones sean los valores 3 y -2.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.

b) (5 puntos) Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) Represente la gráfica de la función $y = -2x + 5$.

b) (3 puntos) Represente gráficamente la función $y = (2-x)\cdot(x+1) - 2$.

c) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}$.

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) Dada la función $f(x) = x - \dfrac{3}{x+2}$ estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.

b) (4 puntos) Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

b) (5 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?

b) (5 puntos) En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2010

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$**.**

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción anterior por el conjugado del denominador obtenemos:

$$\frac{2}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{18-8}=\frac{2\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)}{10}=$$

$$=\frac{\sqrt{18}-\sqrt{8}}{5}=\frac{\sqrt{2\cdot 3^2}-\sqrt{2\cdot 2^2}}{5}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$$

b) (5 puntos) **Determine los coeficientes de la ecuación** $3x^2-ax+b=0$ **para que sus soluciones sean los valores 3 y** -2**.**

Como 3 y -2 son soluciones de la ecuación dada han de satisfacerla, es decir que al sustituir x por 3 y por -2 la igualdad debe cumplirse; por tanto:

$$3\cdot 3^2-a\cdot 3+b=0$$
$$3\cdot(-2)^2-a\cdot(-2)+b=0.$$

Operando, queda

$$\left.\begin{array}{l}27-3a+b=0\\12+2a+b=0\end{array}\right\}\rightarrow$$ se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Restando ambas ecuaciones:

$$15-5a=0\rightarrow 15=5a\rightarrow a=\frac{15}{5}=3\rightarrow b=-27+3a=-18.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética de 20 términos el primero es 5 y el décimo 32. Halle su razón y la suma de sus primeros 20 términos.**

Sabemos que en una progresión aritmética se cumplen las siguientes igualdades:

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

donde d es la diferencia, o razón de la progresión.
Particularizando las expresiones anteriores a nuestro caso, tendríamos:

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d \rightarrow 32 = 5 + 9d \rightarrow 9d = 27 \rightarrow d = 3$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2}$$

Calculemos a_{20}:

$$a_{20} = a_1 + (20-1)d = 5 + 19 \cdot 3 = 5 + 57 = 62$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(5 + 62) \cdot 20}{2} = \frac{67 \cdot 20}{2} = 670$$

b) (5 puntos) **Un banco concedió a una empresa un préstamo, a un interés compuesto del 6% durante 5 años y al cabo de ese tiempo el interés acumulado es de 3382.25 euros. ¿Qué capital prestó el banco a esa empresa?**

La fórmula del interés compuesto cuando el tiempo, *n*, viene expresado en años es:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

siendo *r* el tanto por ciento anual, rédito, al que se concede el préstamo.

Desconocemos el capital prestado C_0, pero sabemos que el capital final, C_n, la cantidad a devolver al banco, es la suma del capital prestado más los intereses devengados, es decir $C_5 = C_0 + 3382.25$.

Sustituyendo en la fórmula general:

$$C_0 + 3382.25 = C_0\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \rightarrow C_0 + 3382.25 = C_0 \cdot 1.06^5 \rightarrow 1.06^5 C_0 - 1 \cdot C_0 = 3382.25$$

$$1.338225578C_0 - 1C_0 = 3382.25 \rightarrow 0.338225578C_0 = 3382.25 \rightarrow$$

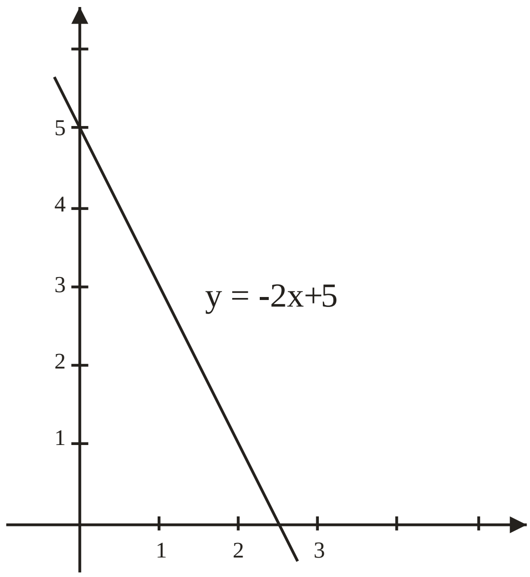
$$\rightarrow C_0 = \frac{3382.25}{0.338225578} \cong 10000$$

En consecuencia, el préstamo ascendía a 10000 euros.

EJERCICIO 3

a) (2 puntos) **Represente la gráfica de la función** $y = -2x + 5$**.**

La función anterior corresponde, gráficamente, a una recta. Para representarla es suficiente conocer dos puntos de ella, en particular los puntos donde corta a los ejes de coordenadas; éstos se obtienen así:
$x = 0 \rightarrow y = 5$; es decir, el punto (0, 5), punto donde la recta corta al eje de ordenadas, es un punto de la recta.
$y = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$; es decir, el punto (2.5, 0), punto donde la recta corta al eje de abscisas, es un punto de la recta.
La representación gráfica sería:



b) (3 puntos) **Represente gráficamente la función** $y = (2 - x) \cdot (x + 1) - 2.$

Efectuando las operaciones indicadas en la expresión anterior quedaría:

$$y = -x^2 + x + 2 - 2 = -x^2 + x.$$

La función anterior, polinómica de grado 2, corresponde gráficamente a una parábola. Para representarla es suficiente conocer el vértice y los puntos donde corta a los ejes de coordenadas.
Cálculo del vértice: Al ser el coeficiente de x^2 negativo, indica que la parábola es cóncava, el vértice está hacia arriba, es un máximo. La abscisa del vértice se obtiene derivando e igualando a 0:

$$y' = -2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para calcular la ordenada del vértice sustituimos este valor de *x*, 0.5, en la función y obtenemos $y = -0.5^2 + 0.5 = -0.25 + 0.5 = 0.25$
Es decir, el vértice de la parábola, máximo de la función, es el punto de coordenadas $(0.5, 0.25)$.

Corte al eje de ordenadas:

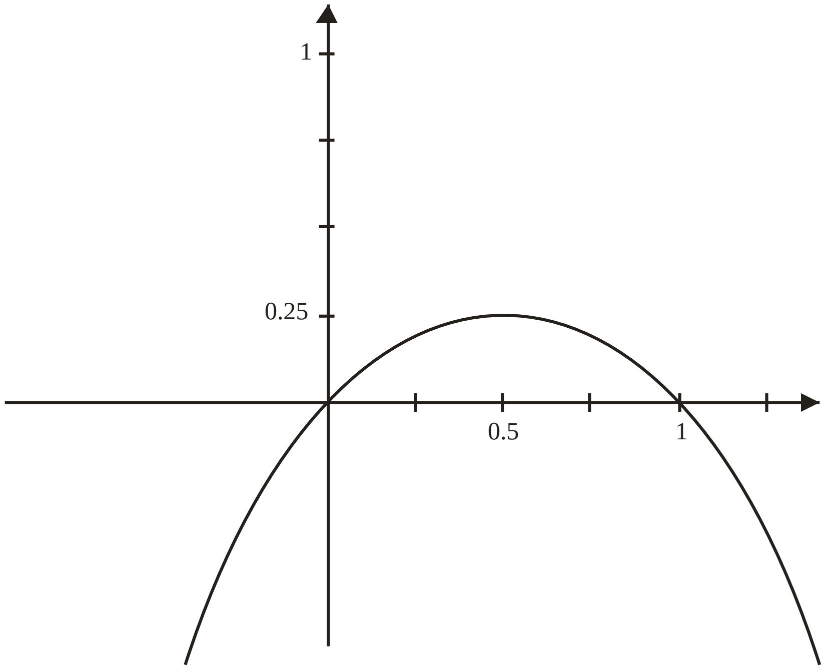
$x = 0 \to y = 0.$ Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0), origen de coordenadas.

Corte al eje de abscisas:

$y = 0 \to -x^2 + x = 0 \to x(-x+1) = 0 \to x = 0,$ ó $-x+1 = 0 \to x = 0,$ ó $x = 1.$

Corta al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (1, 0).

Con los datos obtenidos es inmediato dibujar la gráfica:



c) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $y = \sqrt{x-1} + \dfrac{1}{x^2+1}.$

Hay que tener en cuenta que se trata de derivar una suma en la que el primer sumando es una raíz cuadrada y el segundo es un cociente; por tanto

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{0 \cdot (x^2+1) - 1 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

EJERCICIO 4

a) (6 puntos) **Dada la función** $f(x) = x - \dfrac{3}{x+2}$ **estudie si tiene asíntotas verticales u horizontales y represente las que existan. Determine también las regiones de crecimiento y decrecimiento de esta función.**

Expresemos la función anterior como una función racional, efectuando, para ello, la diferencia

$$f(x) = x - \frac{3}{x+2} = \frac{x^2+2x-3}{x+2}.$$

Las asíntotas verticales son rectas con ecuación de la forma $x = k$, siendo k un valor tal que $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$. En nuestro caso esta condición se cumple cuando $k = -2$, por tanto la recta de ecuación $x = -2$ es una asíntota vertical.

Las asíntotas horizontales son rectas con ecuación de la forma $y = h$, siendo h un valor tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = h$. En nuestro caso $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x+2} = \infty$, por lo que no hay asíntota horizontal.

Las asíntotas oblicuas son rectas cuya ecuación es de la forma $y = mx + n$, siendo m un valor dado por $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

En nuestro caso $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2+2x-3}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-3}{x(x+2)}$=1.

En cuanto a n viene dado por $n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$.

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3}{x+2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-3-x^2-2x}{x+2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{-3}{x+2}\right] = 0.$$

En consecuencia, la asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x$.

La representación gráfica de las asíntotas equivale, por tanto, a la representación gráfica de dos rectas cuyas ecuaciones son $x = -2$, recta perpendicular al eje de abscisas por el punto $(-2, 0)$ e $y = x$, que es la bisectriz del 1º y 3º cuadrante.

La función es creciente en aquellos puntos donde la primera derivada es positiva, es decreciente en los puntos donde esta derivada es negativa; por tanto habrá que calcular la derivada de esa función y estudiar el signo de ésta:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x+2) - (x^2+2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+6x+4-x^2-2x+3}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}$$

El denominador de esta fracción, por ser un cuadrado, toma siempre valores positivos (exceptuamos el valor 0, cuando $x = -2$ donde la función no es continua), por tanto el signo de la fracción será el que tome el numerador.

Tratemos de expresar en forma de producto el numerador; para ello calculemos sus raíces:

$$x^2 + 4x + 7 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2}$$

Al resultarnos la raíz de un número negativo, que no existe en el conjunto de los números reales, podemos concluir que la parábola correspondiente a la representación gráfica de la función del numerador no corta al eje de abscisas por lo que los valores de la función son, para cualquier valor de *x* positivos ó negativos, en nuestro caso positivo. En conclusión la función es creciente en todo su dominio, es decir en el conjunto

$$(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty).$$

b) (4 puntos) **Se lanzan simultáneamente dos dados cuyas caras están numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las caras sea 12?**

El espacio muestral, resultados posibles, estaría formado por las siguientes 36 parejas de resultados:

$$E = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6), \end{Bmatrix}$$

Cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad de obtenerse, es decir se trata de resultados equiprobables, por lo que la probabilidad de que se realice uno cualquiera de ellos vale $\frac{1}{36}$.

Nos piden la probabilidad de que la suma de las caras sea 12; esta suma sólo se presenta cuando se obtiene el resultado (6,6), por tanto la probabilidad de que la suma sea 12 es igual que la probabilidad de que se obtenga (6, 6), o sea $\frac{1}{36}$.

EJERCICIO 5

Una cooperativa aceitera quiere realizar un estudio sobre la influencia de las campañas publicitarias en sus cifras de ventas. Para ello dispone del gasto destinado a publicidad y del volumen de ventas en los últimos 5 años (ambos en miles de euros):

X : gasto en publicidad	2.5	2.8	2.9	3.1	3.5
Y : ventas	200	221	230	239	248

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál será el volumen de ventas si la inversión en publicidad ascendiera a 3.8 miles de euros?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y - \bar{y} = r\frac{s_y}{s_x}\left(x - \bar{x}\right) \text{, ó también } \quad y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x - \bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r = \dfrac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ es la varianza de la variable X, s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ es la media aritmética de la variable X.

Dispongamos los cálculos necesarios en forma de tabla:

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	y_i^2
	2.5	200	6.25	500	40000
	2.8	221	7.84	618.8	48841
	2.9	230	8.41	667	52900
	3.1	239	9.61	740.9	57121
	3.5	248	12.25	868	61504
Sumas $\rightarrow$	14.8	1138	44.36	3394.7	260366

$$\bar{x} = \frac{14.8}{5} = 2.96; \quad \bar{y} = \frac{1138}{5} = 227.6; \quad s_x^2 = \frac{44.36}{5} - 2.96^2 = 8.872 - 8.7616 = 0.1104$$

$$s_x = \sqrt{0.1104} \cong 0.332; \quad s_y^2 = \frac{260366}{5} - 227.6^2 = 52073.2 - 51801.76 = 271.44;$$

$$s_y = \sqrt{271.44} \cong 16.475; \quad s_{xy} = \frac{3394.7}{5} - 2.96 \cdot 227.6 = 678.94 - 673.696 = 5.244$$

La ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es

$$y - 227.6 = \frac{5.244}{0.1104}(x - 2.96)$$

ó en forma explícita $y = 47.5x + 87$.
La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable *Y* (venta obtenida) para valores de la variable *X* (inversión en publicidad).

En concreto, si se invierte en publicidad 3.8 miles de euros, $x = 3.8$, la venta estimada sería

$$y = 47.5 \cdot 3.8 + 87 = 180.5 + 87 = 267.5 \text{ miles de euros.}$$

b) (5 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{5.244}{0.332 \cdot 16.475} = \frac{5.244}{5.47406} \cong 0.9579$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de *r* va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de *r* y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más gasto en publicidad más venta) muy intensa.

EJERCICIO 6

a) (5 puntos) **En una ciudad se sabe que el 55% de las personas son mujeres y el 40% son mujeres y mayores de edad. Asimismo, el 35% de las personas de esa ciudad son hombres mayores de edad. Se elige al azar una persona y resulta ser mayor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona sea, además, mujer?**

La representación, mediante la siguiente tabla, de la distribución de las personas de esa ciudad nos facilita la resolución.

	mujeres	hombres	totales
mayores	40%	35%	75%
menores	15%	10%	25%
totales	55%	45%	100%

El número de cada celdilla representa el porcentaje de personas que cumplen, simultáneamente, la condición de la fila (mayor o menor) y columna (mujer u hombre) en la que se encuentra dicho número.

Por consiguiente, la probabilidad de que sea mujer sabiendo que es mayor de edad es de $\frac{40}{75} = 0.53$.

b) (5 puntos) **En un colegio se estudia la distribución de la nota de Matemáticas de sus estudiantes, resultando ser una Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2. Se elige al azar un estudiante de ese colegio, ¿cuál será la probabilidad de que su nota en esta asignatura sea mayor que 7.5?**

Sabemos que si la variable *X*, nota de Matemáticas de los alumnos de ese colegio, se distribuye según una ley Normal de media 7.2 y desviación típica 1.2, $X \to N(7.2,1.2)$, la variable $\frac{X-7.2}{1.2}$ se distribuye según una variable Normal tipificada, *Z*, es decir *N*(0,1), cuyos valores vienen tabulados. Por lo tanto vamos a pasar de la variable *X* a la *Z*.

Nos preguntan la probabilidad de que la variable *X* tome valores mayores que 7.5, es decir

$$P(X > 7.5) = P(X - 7.2 > 7.5 - 7.2) = P(\frac{X-7.2}{1.2} > \frac{0.3}{1.2}) = P(Z > 0.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2011 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\dfrac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\dfrac{2}{\sqrt{27}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación

$$3(x-2) \leq \frac{4-2x}{3}.$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule las derivadas de las funciones

$$f(x) = \frac{(2-x)^2}{3x} \quad \text{y} \quad g(x) = \left(x^2 - x\right)\left(x^3 + 2x\right).$$

b) (5 puntos) Halle el valor de la constante *a* para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 6 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{12}{x} - a & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en x=3 para ese valor de *a*.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.

b) (5 puntos) Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.

b) (6 puntos) Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.

b) (3 puntos) Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.

c) (4 puntos) Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2011

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\frac{3}{4\sqrt{3}-3}$ y $\frac{2}{\sqrt{27}}$**.**

$$\frac{3}{4\sqrt{3}-3}=\frac{3\cdot\left(4\sqrt{3}+3\right)}{\left(4\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(4\sqrt{3}+3\right)}=\frac{12\sqrt{3}+9}{\left(4\sqrt{3}\right)^2-3^2}=\frac{12\sqrt{3}+9}{16\cdot 3-9}=\frac{12\sqrt{3}+9}{39}=\frac{4\sqrt{3}+3}{13}$$

$$\frac{2}{\sqrt{27}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{27}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{27^2}}=\frac{2\cdot\sqrt{27}}{27}=\frac{2\cdot\sqrt{3^2\cdot 3}}{27}=\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{27}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación** $3(x-2)\le\frac{4-2x}{3}$.

$$3(x-2)\cdot 3\le\frac{4-2x}{3}\cdot 3\rightarrow\ 9(x-2)\le 4-2x\rightarrow 9x-18\le 4-2x\rightarrow 9x+2x\le 18+4\rightarrow$$

$$\rightarrow 11x\le 22\rightarrow\frac{11x}{11}\le\frac{22}{11}\rightarrow x\le 2\,.$$

Se puede expresar el conjunto solución, de forma equivalente, así $\left(-\infty,2\right]$.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las funciones**

$$f(x)=\frac{(2-x)^2}{3x}\quad\text{y}\quad g(x)=\left(x^2-x\right)\left(x^3+2x\right).$$

$$f\,'(x)=\frac{2\cdot(2-x)\cdot(-1)\cdot 3x-3\cdot(2-x)^2}{(3x)^2}=\frac{(4-2x)\cdot(-3x)-3\cdot\left(4-4x+x^2\right)}{9x^2}=$$

$$=\frac{-12x+6x^2-12+12x-3x^2}{9x^2}=\frac{3x^2-12}{9x^2}=\frac{3\cdot\left(x^2-4\right)}{3\cdot 3x^2}=\frac{x^2-4}{3x^2}.$$

$$g'(x)=(2x-1)\cdot\left(x^3+2x\right)+\left(x^2-x\right)\cdot\left(3x^2+2\right)=$$

$$=2x^4+4x^2-x^3-2x+3x^4+2x^2-3x^3-2x=$$

$$=5x^4-4x^3+6x^2-4x.$$

b) (5 puntos) **Halle el valor de la constante *a* para que la función**

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-6 & \text{si} \quad x<3 \\ \dfrac{12}{x}-a & \text{si} \quad x\geq 3 \end{cases}$$

sea continua en todos los números reales y estudie si es derivable en *x*=3 para ese valor de *a*.

Para que sea continua la función en $x=3$ debe cumplirse $9a-6=4-a \rightarrow a=1$.

Para que sea derivable debe cumplirse $2\cdot 3$ sea igual a $-\dfrac{12}{9}$, lo que, evidentemente, no es cierto, por lo que la función no es derivable en $x=3$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Sabiendo que el primer término de una progresión aritmética es 30 y el cuarto es 39, halle la diferencia de la progresión y la suma de sus primeros 25 términos.**

Notemos por a_1, a_4, S_{25}, el primer término, cuarto término y la suma de los 25 primeros términos, respectivamente, de esa progresión aritmética y sea *d* la diferencia o razón de la progresión.

En una progresión aritmética se verifican las siguientes relaciones:

$$a_4=a_1+(4-1)\cdot d \qquad\qquad S_{25}=\frac{(a_1+a_{25})\cdot 25}{2}$$

Sustituyendo los datos conocidos en la 1ª igualdad:

$$39=30+3d \rightarrow 39-30=3d \rightarrow d=\frac{9}{3}=3$$

Calculemos a_{25}, término necesario para calcular la suma de los 25 primeros términos:

$$a_{25}=a_1+(25-1)d=30+24\cdot 3=30+72=102$$

$$S_{25}=\frac{(a_1+a_{25})\cdot 25}{2}=\frac{(30+102)\cdot 25}{2}=\frac{132\cdot 25}{2}=1650$$

b) (5 puntos) **Hace cuatro años se depositó una cantidad de dinero en una cuenta de ahorro, a un interés compuesto, con un rédito del 4% anual. Si el capital obtenido finalmente es de 6424.22 euros, calcule el capital inicial que se depositó y los intereses totales que ha producido en los 4 años.**

$$C_F = C_I\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = C_I\left(1+\frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22$$

$$C_I\left(1+\frac{4}{100}\right)^4 = 6424.22 \rightarrow C_I(1.04)^4 = 6424.22$$

$$1.1698\cdot C_I = 6424.22 \rightarrow C_I = \frac{6424.22}{1.1698} \cong 5491.72$$

Los intereses producidos son la diferencia entre el capital final obtenido, 6424.22 euros, y el capital inicial desembolsado, 5491.72, es decir: 6424.22 − 5491.72=932.5 euros.

EJERCICIO 4

En la corrección de errores tipográficos de un texto se han encontrado 22 páginas con 1 solo error en cada una, 9 páginas con 2 errores en cada una, 6 páginas con 3 errores en cada una, 3 páginas con 4 errores en cada una, 2 páginas con 5 errores en cada una y ningún error en las 58 páginas restantes.

a) (4 puntos) **Construya las tablas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas de la distribución del número de errores por página en este texto.**

Del enunciado se desprende que la variable estadística, X, que se estudia es “número de errores por página”. Esta variable toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5 puesto que hay páginas en las que hay 0 errores, páginas en las que hay 1 error, así sucesivamente hasta páginas con 5 errores.

El número de páginas que hay con 0 errores, que es 58, es la frecuencia absoluta del valor 0; la frecuencia absoluta del valor 1 es 22 y así sucesivamente.

En consecuencia la tabla estadística correspondiente sería

Nº de errores: X	Nº páginas: frecuencia absoluta, n_i	Frecuencia Relativa f_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
0	58	$\frac{58}{100} = 0.58$	0	0
1	22	$\frac{22}{100} = 0.22$	22	22
2	9	$\frac{9}{100} = 0.09$	18	36
3	6	$\frac{6}{100} = 0.06$	18	54
4	3	$\frac{3}{100} = 0.03$	12	48
5	2	$\frac{2}{100} = 0.02$	10	50
Sumas $\rightarrow$	**100**	**1**	**80**	**210**

b) (6 puntos) **Halle la media y la desviación típica del número de errores por página en dicho texto.**

Las dos últimas columnas de la tabla anterior disponen los cálculos previos para determinar la media aritmética, $\bar{x}$, la varianza, s^2, y la desviación típica, s.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{210}{100} - 0.8^2 = 2.1 - 0.64 = 1.46$$

$$s = \sqrt{1.46} \cong 1.21.$$

EJERCICIO 5

De una caja que contiene 2 bolas rojas, 3 blancas y 1 negra, se extraen al azar dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento, y se observan sus colores en el orden en el que se extraen.

a) (3 puntos) **Describa el espacio muestral de este experimento aleatorio.**

Teniendo en cuenta que el espacio muestral consta de los resultados posibles del experimento aleatorio y denotando por "r" extraer bola roja, "b" blanca y "n" negra y teniendo en cuenta que cada resultado sería una pareja de bolas en un determinado orden, tendríamos como espacio muestral:

r r, r b, r n, b r, b b, b n, n r, n b

b) (3 puntos) **Halle la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.**

Puesto que hay 2 bolas rojas en un total de 6, si extraemos una bola, la probabilidad de que esta sea roja es $\frac{2}{6} \cong 0.33$.

c) (4 puntos) **Halle la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color.**

Es la suma de la probabilidad de extraer r r con la probabilidad de extraer b b, es decir:

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}\cong 0.27$$

EJERCICIO 6

El peso de las manzanas que se producen en una huerta sigue una ley Normal de media 150 gramos y una desviación típica de 20 gramos.

a) (5 puntos) **¿Qué porcentaje de estas manzanas tendrá un peso inferior a 115 gramos?**

Sea X la variable aleatoria "peso de las manzanas producidas en la huerta". Si X sigue una ley Normal de media 150 y desviación típica 20, la variable $\frac{X-150}{20}=Z$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1.

Teniendo en cuenta lo anterior, la probabilidad de que esa variable X tome valores inferiores a 115 viene dada por

$$P(X<115)=P\left(\frac{X-150}{20}<\frac{115-150}{20}\right)=P(Z<-1.75)=P(Z>+1.75)=$$

$$=1-P(Z\leq 1.75)=1-0.9599=0.0401\equiv 4.01\%.$$

b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una manzana, elegida al azar en este huerto, tenga un peso que se encuentre entre 165 y 220 gramos.**

$$P(165 < X < 220) = P\left(\frac{165-150}{20} < \frac{X-150}{20} < \frac{220-150}{20}\right) =$$

$$= P(0.75 < Z < 3.5) = P(Z < 3.5) - P(Z < 0.75) = 0.99977 - 0.7734 = 0.22637.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2012 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice y simplifique la fracción $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

b) (5 puntos) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2}, \quad g(x)=x(\ln x-1).$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) La ecuación de segundo grado $x^2+px+7=0$ tiene la solución $x=-1$. Determine p y la otra solución de la ecuación.

b) (5 puntos) Sean A y B dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son $P(A)=0.25$ y $P(B)=0.35$.
Calcule $P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$, $P(A^C\cap B)$.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) Calcule $4^{-1}+\dfrac{3}{5}\left(2-\dfrac{5}{3}\right)$ y $\dfrac{3}{4}:\dfrac{9}{2}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-1}$.

b) (5 puntos) Determine el valor del parámetro a para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+3x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

sea continua en x=1. Para a=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) Resuelva el sistema lineal $\begin{cases} 3(x-2)-5y=4 \\ 4x-3(y-2)=3x+8 \end{cases}$.

b) (5 puntos) Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.

EJERCICIO 5

En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos

Personas	1	2	3	4	5
Pisos	20	60	52	35	18

a) (2 puntos) ¿Cuántos pisos hay en la urbanización?

b) (4 puntos) Determine la media y la moda de la distribución.

c) (4 puntos) Determine la varianza y la desviación típica de la misma.

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.

a) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.

b) (5 puntos) Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2012

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice y simplifique la fracción** $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **.**

$$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{6\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=2\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right).$$

b) (5 puntos) **Calcule las derivadas de las siguientes funciones:**

$$f(x)=\frac{x}{3+x^2},\qquad g(x)=x(\ln x-1).$$

$$f'(x)=\frac{1\left(3+x^2\right)-2x\cdot x}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3+x^2-2x^2}{\left(3+x^2\right)^2}=\frac{3-x^2}{\left(3+x^2\right)^2}.$$

$$g'(x)=\ln x-1+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **La ecuación de segundo grado** $x^2+px+7=0$ **tiene la solución** $x=-1.$ **Determine *p* y la otra solución de la ecuación.**

Por ser $x=-1$ solución de la ecuación ha de satisfacerla, es decir que si se sustituye x por -1 en la ecuación, ésta debe cumplirse

$$\left(-1\right)^2+p\left(-1\right)+7=0\rightarrow 1-p+7=0\rightarrow 8-p=0\rightarrow p=8$$

Por tanto la ecuación sería

$$x^2+8x+7=0$$

Ésta es una ecuación de 2º grado, cuyas soluciones serían

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 1\cdot 7}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-8\pm 6}{2}\qquad x_1=-1\quad x_2=-7.$$

Por tanto: $p=8$ y la otra solución es $x=-7$.

b) (5 puntos) **Sean *A* y *B* dos sucesos incompatibles de un espacio muestral cuyas probabilidades son** $P(A) = 0.25$ y $P(B) = 0.35$.
Calcule $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A^C \cap B)$.

El enunciado nos dice que A y B son incompatibles, por tanto su intersección es el suceso imposible, cuya probabilidad es 0, es decir:

$$P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

Sabemos que, en general,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.35 - 0 = 0.60.$$
$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.35 - 0 = 0.35.$$

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **Calcule** $4^{-1} + \frac{3}{5}\left(2 - \frac{5}{3}\right)$ y $\frac{3}{4} : \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$.

$$4^{-1} + \frac{3}{5}\left(2 - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{4^1} + \frac{3}{5}\left(\frac{2 \cdot 3 - 5}{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{3}{5 \cdot 3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20}.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 9} - \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^1} = \frac{6}{36} - \left(1 : \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1 \cdot 6}{1} = \frac{1}{6} - 6 = \frac{1 - 36}{6} = -\frac{35}{6}.$$

b) (5 puntos) **Determine el valor del parámetro *a* para que la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x^2 + 3x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

sea continua en *x*=1. Para *a*=0, determine los vértices de cada una de las parábolas.

Para que la función sea continua debe cumplirse que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$f(1) = (1)^2 - 1 + a = a$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = (1)^2 - 1 + a = a$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -(1)^2 + 3 \cdot 1 + 3 = 5\,.$$

Por tanto debe ser $a = 5$.

La primera parábola viene dada por la función $f(x) = x^2 - x$.

Su derivada, igualada a 0, nos daría la abscisa del vértice de la parábola:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la función $f(x) = x^2 - x,\ x = \dfrac{1}{2}$, obtendríamos la ordenada del vértice:

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \ .$$

Por tanto el vértice de la primera parábola sería el punto de coordenadas $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

En la segunda parábola, $f(x) = -x^2 + 3x + 3$, procediendo de forma análoga se obtendría como vértice el punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{21}{4}\right)$.

EJERCICIO 4

a) (5 puntos) **Resuelva el sistema lineal** $\begin{cases} 3(x-2) - 5y = 4 \\ 4x - 3(y-2) = 3x + 8 \end{cases}$.

Operando, el sistema dado se transforma en otros equivalentes:

$$\begin{cases} 3x - 6 - 5y = 4 \\ 4x - 3y + 6 = 3x + 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 10 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

despejando x en la 2ª ecuación $x = 3y + 2$ y sustituyendo en la 1ª:

$$3(3y+2) - 5y = 10 \rightarrow 9y + 6 - 5y = 10 \rightarrow 4y = 4 \rightarrow y = \frac{4}{4} = 1$$

y como $x = 3y + 2 \rightarrow x = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

b) (5 puntos) **Una persona coloca 20000 euros en un producto de inversión que ofrece una rentabilidad anual del 2% de interés compuesto durante 3 años. Determine los intereses producidos cada año y el capital final obtenido al acabar el plazo previsto.**

Al finalizar el 1º año:

$$i_1 = \frac{20000 \cdot 2}{100} = 400$$

Al finalizar el 2º año:

$$i_2 = \frac{20400 \cdot 2}{100} = 408$$

Al finalizar el 3º año:

$$i_3 = \frac{20808 \cdot 2}{100} = 416.16$$

Por lo tanto, el capital final sería: 20000+400+408+416.16= 21224.16 euros.

El cálculo directo del capital final, podríamos obtenerlo, también, utilizando la fórmula del interés compuesto:

$$C_F = C_I\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 20000\left(1+\frac{2}{100}\right)^3 = 20000\cdot(1.02)^3 = 20000\cdot 1.061208 = 21224.16.$$

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **En una urbanización se ha realizado un estudio sobre el número de personas que habitan en cada piso y se obtienen los siguientes datos**

Personas	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Pisos	**20**	**60**	**52**	**35**	**18**

i) (2 puntos) **¿Cuántos pisos hay en la urbanización?**

Del enunciado se desprende que la variable estadística X que se está estudiando es el número de personas que habitan en cada uno de los pisos de un conjunto de pisos observados, en concreto el número de pisos observados es la suma de la segunda fila de la tabla: 20+60+52+35+18=185.

Esta variable estadística toma los valores 1 con frecuencia absoluta 20, 2 con frecuencia 60, 3 con frecuencia 52, 4 con frecuencia 35 y, por último, la frecuencia absoluta del valor 5 es 18.

ii) (4 puntos) **Determine la media y la moda de la distribución.**

Disponiendo la tabla en la forma clásica y con la notación tradicional, efectuamos los cálculos previos necesarios para contestar a éste y al siguiente apartado:

Nº personas: X	Frec. Absol. n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i^2 \cdot n_i$
1	20	20	20
2	60	120	240
3	52	156	468
4	35	140	560
5	18	90	450
Sumas $\rightarrow$	**185**	**526**	**1738**

La media aritmética, $\bar{x}$, de la variable X, viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{526}{185} \cong 2.84$$

El valor modal de esa variable estadística, el de mayor frecuencia, es 2.

iii) (4 puntos) **Determine la varianza y la desviación típica de la misma.**

La varianza, s^2, de la variable X, viene dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\bar{x})^2 = \frac{1738}{185} - 2.84^2 \cong 9.39 - 8.06 = 1.33$$

La desviación típica, *s*, es la raíz cuadrada de la varianza:

$$s = \sqrt{1.33} \cong 1.15$$

EJERCICIO 6

La duración de un tipo de pilas alcalinas sigue una distribución Normal de media 55 horas y una desviación típica de 6 horas.
a) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure más de 53 horas.**

Sea X la variable aleatoria "duración de un tipo de pilas alcalinas".

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(55, 6)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 55 y desviación típica 6, la variable $Z = \frac{X-55}{6}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La pregunta formulada se puede expresar así:

$$P(X > 53) = P(\frac{X-55}{6} > \frac{53-55}{6}) = P(Z > -0.33) = 1 - P(Z > 0.33) = P(Z \le 0.33) =$$
$$= 0.6293$$

b) (5 puntos) **Calcule la probabilidad de que una pila elegida al azar dure entre 56 y 58 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(56 \le X \le 58) = P\left(\frac{56-55}{6} \le \frac{X-55}{6} \le \frac{58-55}{6}\right) = P(0.16 \le Z \le 0.5) =$$

$$= P(Z \le 0.5) - P(Z \le 0.16) = 0.6915 - 0.5636 = 0.1279.$$

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS EN 2013 EN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) Racionalice las expresiones $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\frac{3}{\sqrt{18}}$.

b) (5 puntos) Halle el conjunto de soluciones de la inecuación $-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}$.

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\frac{(x^3+5x^2+6x-1)}{x+1}$.

b) (5 puntos) Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.

b) (5 puntos) Calcule la derivada de la función $f(x)=\ln(x^3)+\sqrt{x^4-3x^2+8}$.

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

X=Memoria	39	38.5	38	36.5
Y=Velocidad	100	90	80	65

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

b) (4 puntos) Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.

b) (5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto $x = 4$, de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:

a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

b) (5 puntos) Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.

RESOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE 2013

EJERCICIO 1

a) (5 puntos) **Racionalice las expresiones** $\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$ y $\frac{3}{\sqrt{18}}$.

$$\frac{5}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{8}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{8-3}=\frac{5\cdot\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)}{5}=$$

$$=\sqrt{8}+\sqrt{3}=\sqrt{2^3}+\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}}=\frac{3\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{18^2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot 3^2}}{18}=\frac{3\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{18}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) (5 puntos) **Halle el conjunto de soluciones de la inecuación**

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}.$$

$$-5\cdot(x+8)\geq\frac{(10+5x)}{3}\rightarrow -15\cdot(x+8)\geq(10+5x)\rightarrow -15x-120\geq 10+5x\rightarrow$$

$$\rightarrow -15x-5x\geq 10+120\rightarrow -20x\geq 130\rightarrow\frac{-20x}{-20}\leq\frac{130}{-20}\rightarrow x\leq-\frac{13}{2}$$

El conjunto de soluciones de la inecuación es el constituido por todos los números reales menores o iguales que -6.5 lo que también se puede expresar así

$$(-\infty,-6.5].$$

EJERCICIO 2

a) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x)=\dfrac{\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{x+1}$.

Aplicando la regla de derivación de un cociente

$$f'(x)=\frac{\left(3x^2+10x\ \ +6\right)\cdot\left(x+1\right)-1\cdot\left(x^3+5x^2+6x-1\right)}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{3x^3+10x^2+6x+3x^2+10x+6-x^3-5x^2-6x+1}{\left(x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^3+8x^2+10x+7}{\left(x+1\right)^2}$$

b) (5 puntos) **Durante 8 años, un capital ha estado depositado en un banco con un interés compuesto del 3%, siendo el capital final obtenido en estos 8 años de 8000 euros, calcule el capital inicial que se depositó en el banco. Calcule los intereses producidos durante los dos primeros años.**

Utilizando la fórmula del interés compuesto $C_t=C_0\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^t$, donde C_t es el capital final al cabo de t años, C_0 es el capital inicial, r es el rédito anual y t es el tiempo transcurrido, en años,

$$8000=C_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^8\rightarrow C_0=\frac{8000}{\left(1.03\right)^8}\cong\frac{8000}{1.26677}\cong 6315.27\text{ euros.}$$

El interés obtenido al finalizar el primer año se puede obtener considerando interés simple,

$$i=\frac{C_0\cdot r\cdot t}{100}\rightarrow i=\frac{6315.27\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 189.46$$

Por tanto al final del 1º año el capital obtenido sería 6315.27+189.46=6504.73.
Procediendo de forma similar para el 2º año se obtendría el siguiente interés

$$i=\frac{6504.73\cdot 3\cdot 1}{100}\cong 195.14$$

En conclusión, interés producido al finalizar el 1º año: 189.46, interés producido durante el 2º año 195.14, interés total producido en los dos primeros años 189.46+195.14=384.60.

El capital obtenido al finalizar los dos primeros años sería 6315.27+384.60=6699.87, cantidad que podría haberse obtenido utilizando interés compuesto a dos años.

EJERCICIO 3

a) (5 puntos) **En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es igual a 100 y el octavo es igual a 128, halle la diferencia de la progresión y la suma de los 30 primeros términos.**

En una progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Entonces,

$$a_8 = a_1 + (8-1)\cdot d \rightarrow 128 = 100 + 7\cdot d \rightarrow 128 - 100 = 7\cdot d \rightarrow d = \frac{28}{7} = 4$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})\cdot 30}{2}$$

Calculando $a_{30} = 100 + 29\cdot 4 = 216$ y sustituyendo en la expresión anterior de la suma

$$S_{30} = \frac{(100+216)\cdot 30}{2} = 4740.$$

b) (5 puntos) **Calcule la derivada de la función** $f(x) = \ln(x^3) + \sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}$.

Se trata de derivar una suma en la que el 1º sumando es una función logaritmo neperiano y el 2º una raíz cuadrada,

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} + \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}} = \frac{3}{x} + \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 8}}.$$

EJERCICIO 4

Tomamos un grupo de 4 ordenadores, en los que estudiamos la velocidad y la memoria, obteniendo los resultados

***X*=Memoria**	**39**	**38.5**	**38**	**36.5**
***Y*=Velocidad**	**100**	**90**	**80**	**65**

a) (6 puntos) Obtenga la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Cuál es la velocidad de un ordenador cuya memoria es 37.5?

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X tiene por expresión

$$y-\bar{y}=r\frac{s_y}{s_x}\left(x-\bar{x}\right) \text{ , ó también } \quad y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}\left(x-\bar{x}\right)$$

donde r es el coeficiente de correlación lineal, que viene definido así $r=\frac{s_{xy}}{s_x s_x}$,

$s_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\bar{x}\cdot\bar{y}$ es la covarianza, $s_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2$ es la varianza de la variable X,

s_x, desviación típica de la variable X, es la raíz cuadrada de la varianza s_x^2, y, por último, $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ es la media aritmética de la variable X.

En la tabla siguiente se disponen los cálculos previos necesarios para la determinación de los parámetros anteriores:

X	Y	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
39	100	1521	10000	3900
38.5	90	1482.25	8100	3465
38	80	1444	6400	3040
36.5	65	1332.25	4225	2372.5
152	**335**	**5779.25**	**28725**	**12777.5**

$\bar{x}=\frac{152}{4}=38$; $\quad \bar{y}=\frac{335}{4}=83.75$; $\quad s_x^2=\frac{5779.25}{4}-38^2=1444.875-1444=0.875$

$s_x=\sqrt{0.875}\cong 0.935$; $\quad s_y^2=\frac{28725}{4}-83.75^2=7181.25-7014.0625\cong 167.19$;

$s_y=\sqrt{167.19}\cong 12.93$; $\quad s_{xy}=\frac{12777.5}{4}-38\cdot 83.75=3194.375-3182.5=11.875$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es

$$y-83.75=\frac{11.875}{0.875}(x-38)$$

o en forma explícita $y=13.57x-431.91$.

La recta obtenida nos permite estimar el valor de la variable Y (velocidad) para valores de la variable X (memoria).

En concreto, para una memoria de 37.5 la velocidad estimada según el modelo anterior sería

$$y=508.875-431.91=76.965$$

b) (4 puntos) **Calcule el coeficiente de correlación lineal e interprete su valor.**

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_x} = \frac{11.875}{0.935 \cdot 12.93} = \frac{11.875}{12.08955} \cong 0.9822$$

Del valor del coeficiente de correlación lineal hay que tener en cuenta dos aspectos: su signo y su valor absoluto (el recorrido de valores de *r* va desde -1 a +1).

El signo nos indica si la relación es directa (al aumentar una variable la otra también lo hace) ó inversa (si aumenta una variable la otra disminuye) pero no nos indica si la relación es intensa o débil.

La relación entre las dos variables, directa o inversa, es más fuerte cuanto más próximo a 1 es el valor absoluto de *r* y más débil cuanto más se acerque a 0.

En nuestro caso se trata de una relación lineal directa (a más memoria más velocidad) muy intensa.

EJERCICIO 5

a) (5 puntos) **Un cajón contiene 10 piezas, de las cuales, 4 son tornillos, 3 son tuercas y 3 son púas. Se extraen dos piezas al azar sin reemplazamiento. Halle la probabilidad de que la primera pieza sea una tuerca. Halle la probabilidad de sacar 2 tuercas.**

Teniendo en cuenta que hay 10 piezas y, de ellas 3 son tuercas, la probabilidad de que la primera pieza extraída sea una tuerca es el cociente $\frac{3}{10} = 0.3$.

Se pueden formar $C_{10,2} = 45$ parejas posibles con las 10 piezas, extrayendo una y después otra y observando la composición de la pareja obtenida. De esas 45 parejas, $C_{3,2} = 3$ estarían constituidas por 2 tuercas; en consecuencia, la probabilidad de que las dos piezas extraídas sean tuercas es el cociente $\frac{3}{45} = \frac{1}{15} \cong 0.067$

b) (5 puntos) **Estudie la continuidad y derivabilidad, en el punto *x* = 4, de la función**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x < 4 \\ -x^2 + 9x - 20 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Para que la función sea continua en $x=4$ debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$$

$$f(4) = -(4)^2 + 9\cdot 4 - 20 = -16 + 36 - 20 = 0$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = (4)^2 - 6\cdot 4 + 8 = 0$$

$$\square \lim_{x\to 4^+} f(x) = -(4)^2 + 9\cdot 4 - 20 = 0 \cdot$$

Por tanto la función dada es continua en $x=4$.

La función derivada de la función dada es $f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si} \quad x<4 \\ -2x+9 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$

Para que la función sea derivable en $x=4$ debe cumplirse que

$f'(4^-) = f'(4^+)$.

En caso de cumplirse la igualdad, éste sería el valor de $f'(4)$.

$$f'(4^-) = \lim_{x\to 4^-} f'(x) = 2\cdot 4 - 6 = 2$$

$$f'(4^+) = \lim_{x\to 4^+} f'(x) = -2\cdot 4 + 9 = 1$$

En conclusión, existen derivadas laterales en $x=4$ pero como son distintas la función no es derivable en $x=4$.

EJERCICIO 6

La vida útil de un modelo de pila sigue una ley Normal con una media de 100 horas y desviación típica de 10 horas:
a) (5 puntos) ¿Qué porcentaje de este modelo de pila tendrá una duración inferior a 120 horas?

Sea X la variable aleatoria “duración de una pila”.

El enunciado dice que esa variable aleatoria X sigue una distribución Normal, $N(100,10)$.

Si X sigue una ley Normal con esos parámetros, media 100 y desviación típica 10, la variable $Z = \dfrac{X-100}{10}$ sigue una ley Normal de media 0 y desviación típica 1, cuyas probabilidades están tabuladas.

La probabilidad de que una pila, elegida al azar, de entre las de ese modelo tenga una duración inferior a 120 horas se puede expresar así:

$$P(X < 120) = P(\frac{X-100}{10} > \frac{120-100}{10}) = P(Z < 2) = 0.9772.$$

En consecuencia, según este modelo, el 97.72% de las pilas tendría una duración inferior a 120 horas.

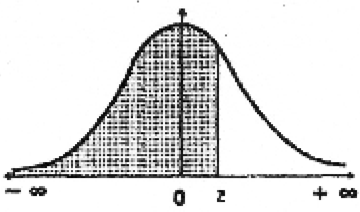
b) (5 puntos) **Halle la probabilidad de que una pila de este modelo elegida al azar, tenga una duración comprendida entre 90 y 110 horas.**

La expresión matemática de la pregunta formulada es:

$$P(90 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{90-100}{10} \leq \frac{X-100}{10} \leq \frac{110-100}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) =$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826.$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0;1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99909	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99959	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria Z, con distribución N(0;1), esté por debajo del valor z.